E.N.S.A.M T, TA. 1992.

Etant donnée une application : $t \mapsto M(t) = (m_{ij}(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}$, on dit que M est de classe C^k (resp.C^∞) si chaque fonction m_{ij} est de classe C^k (resp. C^∞). La dérivée k-ième de M est alors définie par $M^{(k)}(t) = \left(m_{ij}{}^{(k)}(t)\right)$. On admettra que les règles de dérivation des sommes et produits s'appliquent aux sommes et produits matriciels.

Soit $M \in \mathcal{M}$. Si M est diagonalisable, toute expression de la forme $M = P\,D\,P^{-1}$ où P est un élément inversible de $\mathcal{M}$ et D une matrice diagonale, est appelée décomposition diagonale de M ; P est la matrice de passage, D la réduite diagonale.

On désigne enfin par A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 3/2 \\ -2 & 1/2 & -3/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

I

1°) Déterminer les valeurs propres de A.
Préciser une décomposition diagonale de A : $A = P_0 D_0 P_0^{-1}$. (On classera les valeurs propres par ordre de valeurs croissantes et on choisira pour P_0 une matrice dont les vecteurs colonnes ont une première composante égale à 1).

2°) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Déterminer deux réels α_n et β_n tels que :

(1) $$D_0^{\,n} = \alpha_n D_0 + \beta_n D_0^{\,2}.$$

Que peut-on dire de A^n ?

3°) Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par la famille (A^n), $n \in \mathbb{N}$. (On rappelle que $A^0 = I$).
Déduire de ce qui précède la dimension de $\mathcal{P}$ en précisant une base de ce sous-espace.

II

On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}$ telles que

$$A M - M A = 0 .$$

1°) Vérifier que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$.
Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$?

2°) Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ.
Montrer que si $M \in \mathscr{C}$, X est un vecteur propre de M.
Que peut-on en conclure pour la matrice $P_0^{-1} M P_0$? (P_0 a été définie en I.1°).

3°) Déduire de ce qui précède la forme générale des éléments de $\mathscr{C}$.
Comparer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

4°) Utiliser ce qui précède pour déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}$ telles que $M^2 = A$. On donnera de chacune d'elles une décomposition diagonale et son expression explicite.

III

B étant la matrice définie dans le préambule et t étant un nombre réel, on définit les matrices :

$$(2) \qquad C_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} B^{2k} \qquad \text{(avec } B^0 = I) ,$$

$$(3) \qquad S_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1} .$$

1°) Ecrire une décomposition diagonale de B.
En utilisant une décomposition diagonale de $C_n(t)$ et $S_n(t)$, montrer que les suites $(C_n(t))$ et $(S_n(t))$ ont, pour tout $t \in \mathbb{R}$, des limites que l'on notera respectivement C(t) et S(t) . Préciser une décomposition diagonale de C(t) et S(t) et expliciter ces deux matrices.

2°) Calculer $C(t)^2 + S(t)^2$.
Exprimer, pour t et u réels, C(t+u) et S(t+u) à l'aide de C(t), C(u), S(t) et S(u) .

Tournez la page S.V.P.

3°) Montrer que les applications : $t \mapsto C(t)$ et $t \mapsto S(t)$ sont de classe C^∞ et exprimer les dérivées $C'(t)$, $C''(t)$, $S'(t)$ et $S''(t)$ à l'aide des matrices $C(t)$, $S(t)$ et B .

4°) Soit Z un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $BZ = 0$. Calculer $C(t)Z$ et $S(t)Z$.

IV

On considère le système différentiel

$$X'' + B^2X = 0 \qquad (4)$$

où X est une application inconnue, de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.

1°) U et V étant deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, l'application

$$X : t \mapsto C(t)U + S(t)V \qquad (5)$$

est-elle une solution de (4) ?

2°) On choisit $U = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, et on désigne par Γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ de représentation paramétrique : $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$.

Construire la projection de Γ sur le plan Oxy et sur le plan Oyz. Reconnaître la nature géométrique de ces projections.

3°) Soient $X_0 = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $X'_0 = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

La formule (5) permet-elle de déterminer une solution X de (4) vérifiant de plus :

$$X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad X'(0) = X'_0 \ ?$$

On discutera éventuellement suivant les valeurs du vecteur X'_0.

o o

o